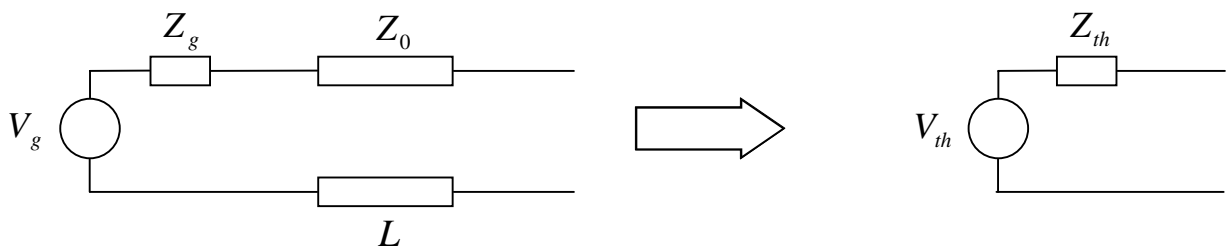


## Circuiti equivalenti di Thevenin e Norton in presenza di linee di trasmissione

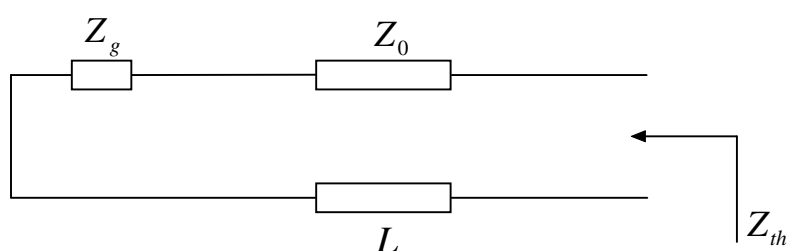
Capita spesso, nei circuiti contenenti linee di trasmissione, di schematizzare la rete di alimentazione attraverso un generatore reale (di tensione o corrente) collegato ad una o più linee di trasmissione. Talvolta risulta conveniente ridurre una tale rete di alimentazione ad un modello ancora più semplificato contenente un solo generatore e la sua impedenza (o ammettenza) interna. Si ricorre a tale scopo ai teoremi e circuiti equivalenti di Thevenin e Norton, noti dall'elettrotecnica.

### Circuito equivalente di Thevenin nel caso di alimentazione con generatore di tensione.

E' questo il caso in cui si abbia a che fare con una configurazione di alimentazione contenente un generatore di tensione con in serie la sua impedenza interna connesso ad una linea di trasmissione (a sinistra nella figura sotto) e si vuole ridurre tale rete ad una più semplice secondo il circuito equivalente di Thevenin (a destra nella figura sotto) :



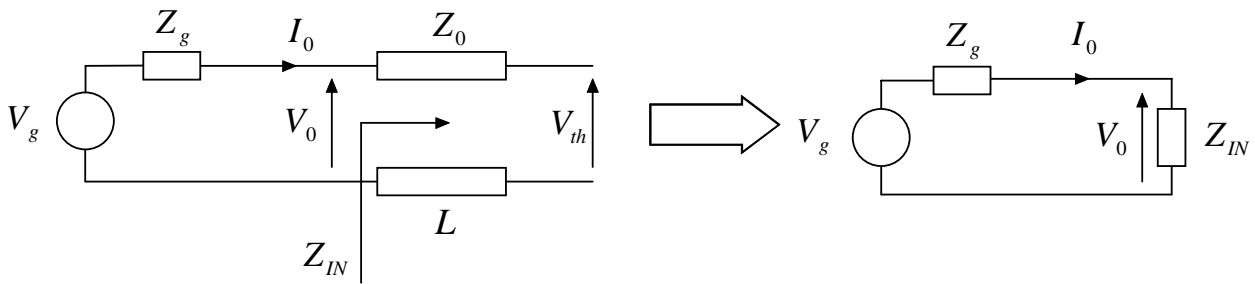
L'impedenza equivalente di Thevenin si calcola passivando la rete a sinistra (cortocircuitare i generatori di tensione e aprire quelli di corrente) e calcolando l'impedenza vista guardando dentro la rete:



Applicando la formula del trasporto di una impedenza attraverso una linea di trasmissione si ottiene:

$$Z_{th} = Z_0 \cdot \frac{Z_g + j \cdot Z_0 \tan(\beta \cdot L)}{Z_0 + j \cdot Z_g \tan(\beta \cdot L)}$$

Il generatore equivalente di Thevenin si calcola attraverso l'utilizzo dell'uso di una delle soluzioni stazionarie delle equazioni dei telegrafisti calcolando dapprima tensione e corrente in ingresso alla linea di trasmissione ( $V_0 \equiv V(0)$ ,  $I_0 \equiv I(0)$ ) e in seguito la tensione in uscita dalla linea ( $V(L) \equiv V_{th}$ ).



Per fare questo conviene ridurre il circuito di sinistra, di cui si vuole calcolare la tensione a vuoto, come recita il teorema di Thevenin, secondo lo schema a destra.

L'impedenza di carico  $Z_{IN}$  è quella di una linea di trasmissione di impedenza caratteristica  $Z_0$  lasciata a circuito aperto (si vuole la tensione a vuoto in uscita dalla rete); questa vale:

$$Z_{IN} = -j \cdot Z_0 \cdot \cot(\beta \cdot L)$$

La corrente e poi la tensione in ingresso alla linea valgono allora:

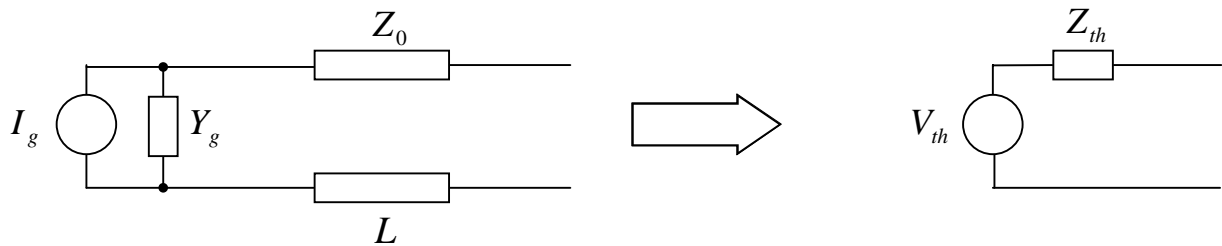
$$I_0 = \frac{V_g}{Z_g + Z_{IN}} \quad V_0 = I_0 \cdot Z_{IN} = V_g \cdot \frac{Z_{IN}}{Z_g + Z_{IN}}$$

Adottando la soluzione in forma viaggiante delle equazioni dei telegrafisti relativa alla tensione all'ascissa  $z = L$  per la linea di trasmissione in figura si ottiene infine:

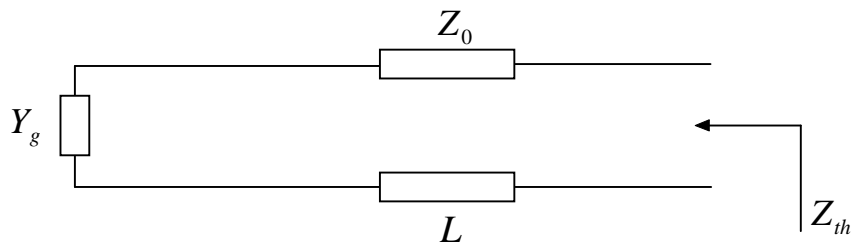
$$V_{th} \equiv V(L) = V_0 \cos(\beta \cdot L) - j \cdot Z_0 \cdot I_0 \cdot \sin(\beta \cdot L) = V_g \cdot \left[ \frac{Z_{IN}}{Z_g + Z_{IN}} \cos(\beta \cdot L) - j \cdot \frac{Z_0}{Z_g + Z_{IN}} \cdot \sin(\beta \cdot L) \right]$$

### Circuito equivalente di Thevenin nel caso di alimentazione con generatore di corrente.

E' questo il caso in cui si abbia a che fare con una configurazione di alimentazione contenente un generatore di corrente con in parallelo la sua ammettenza interna, connessi ad una linea di trasmissione (a sinistra nella figura sotto), e si vuole ridurre tale rete ad una più semplice secondo il circuito equivalente di Thevenin ( a destra nella figura sotto) :



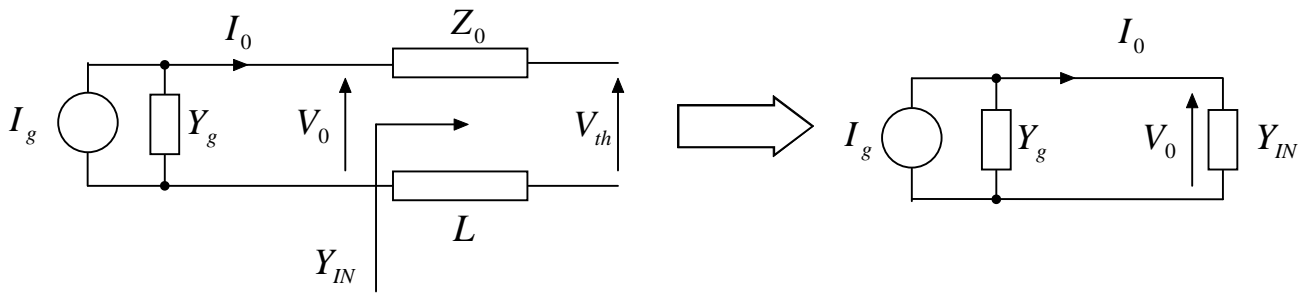
L'impedenza equivalente di Thevenin si calcola come nel caso precedente, passivando la rete a sinistra (cortocircuitare i generatori di tensione e aprire quelli di corrente) e calcolando l'impedenza vista guardando dentro la rete:



Applicando la formula del trasporto di una impedenza attraverso una linea di trasmissione si ottiene, (stando attenti che il carico è ora una ammettenza) :

$$Z_{th} = Z_0 \cdot \frac{\frac{1}{Y_g} + j \cdot Z_0 \tan(\beta \cdot L)}{Z_0 + j \cdot \frac{1}{Y_g} \tan(\beta \cdot L)}$$

Il generatore equivalente di Thevenin si calcola al solito attraverso l'utilizzo dell'uso di una delle soluzioni stazionarie delle equazioni dei telegrafisti calcolando dapprima tensione e corrente in ingresso alla linea di trasmissione ( $V_0 \equiv V(0)$ ,  $I_0 \equiv I(0)$ ) e in seguito la tensione in uscita dalla linea ( $V(L) \equiv V_{th}$ ).



Per fare questo conviene ridurre il circuito di sinistra, di cui si vuole calcolare la tensione a vuoto, come recita il teorema di Thevenin, secondo lo schema a destra.

L'ammettenza di carico  $Y_{IN}$  è quella di una linea di trasmissione di impedenza caratteristica  $Z_0$  lasciata a circuito aperto (si vuole la tensione a vuoto in uscita dalla rete); questa vale:

$$Y_{IN} = j \cdot Y_0 \cdot \tan(\beta \cdot L)$$

La corrente e poi la tensione in ingresso alla linea valgono allora:

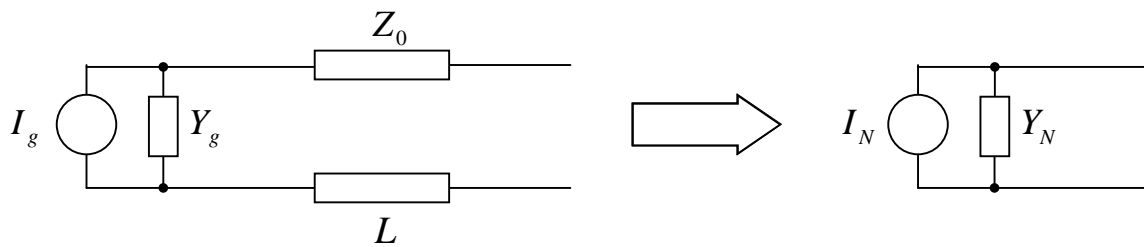
$$V_0 = \frac{I_g}{Y_g + Y_{IN}} \quad I_0 = I_g \cdot \frac{Y_{IN}}{Y_g + Y_{IN}}$$

Adottando la soluzione in forma viaggiante delle equazioni dei telegrafisti relativa alla tensione all'ascissa  $z = L$  per la linea di trasmissione in figura si ottiene infine:

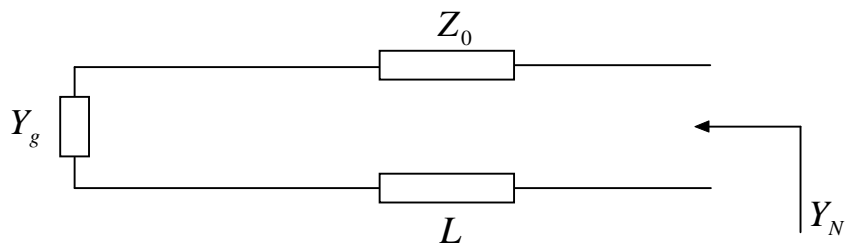
$$V_{th} \equiv V(L) = V_0 \cos(\beta \cdot L) - j \cdot \frac{I_0}{Y_0} \cdot \sin(\beta \cdot L) = I_g \cdot \left[ \frac{1}{Y_g + Y_{IN}} \cos(\beta \cdot L) - j \cdot \frac{\frac{Y_{IN}}{Y_0}}{Y_g + Y_{IN}} \cdot \sin(\beta \cdot L) \right]$$

### Circuito equivalente di Norton nel caso di alimentazione con generatore di corrente.

E' questo il caso in cui si abbia a che fare con una configurazione di alimentazione contenente un generatore di corrente con in parallelo la sua ammettenza interna, connessi ad una linea di trasmissione (a sinistra nella figura sotto), e si vuole ridurre tale rete ad una più semplice secondo il circuito equivalente di Norton ( a destra nella figura sotto) :



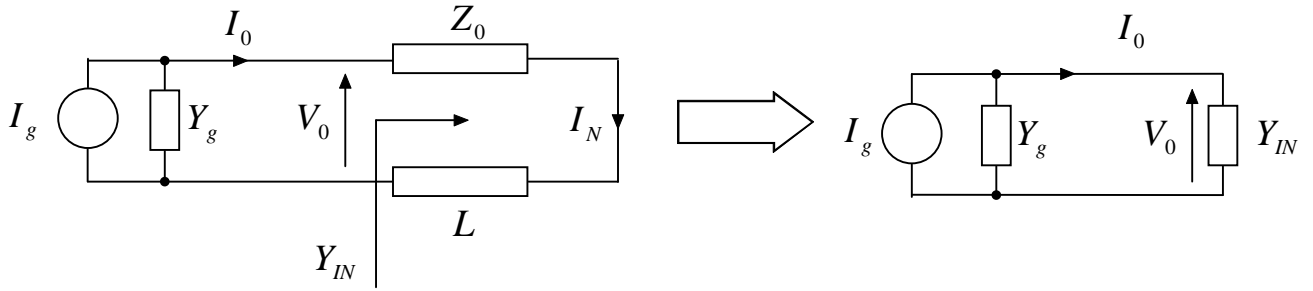
L'ammettenza equivalente di Norton si calcola come nei casi precedenti, passivando la rete a sinistra (cortocircuitare i generatori di tensione e aprire quelli di corrente) e calcolando l'ammettenza vista guardando dentro la rete:



Applicando in questo caso la formula del trasporto di una ammettenza attraverso una linea di trasmissione si ottiene :

$$Y_N = Y_0 \cdot \frac{Y_g + j \cdot Y_0 \tan(\beta \cdot L)}{Y_0 + j \cdot Y_g \tan(\beta \cdot L)}$$

Il generatore equivalente di Norton si calcola come nel caso di Thevenin, ma stavolta attraverso l'uso della seconda soluzione stazionaria delle equazioni dei telegrafisti calcolando dapprima tensione e corrente in ingresso alla linea di trasmissione ( $V_0 \equiv V(0)$ ,  $I_0 \equiv I(0)$ ) e in seguito la corrente in uscita dalla linea ( $I(L) \equiv I_N$ ) quando questa è in corto circuito.



Per fare questo conviene ridurre il circuito di sinistra, di cui si vuole calcolare la corrente di corto circuito, come recita il teorema di Norton, secondo lo schema a destra.

L'ammettenza di carico  $Y_{IN}$  è quella di una linea di trasmissione di impedenza caratteristica  $Z_0$  chiusa in corto circuito (si vuole la corrente di corto circuito in uscita dalla rete); questa vale:

$$Y_{IN} = -j \cdot Y_0 \cdot \cot(\beta \cdot L)$$

La corrente e la tensione in ingresso alla linea valgono allora:

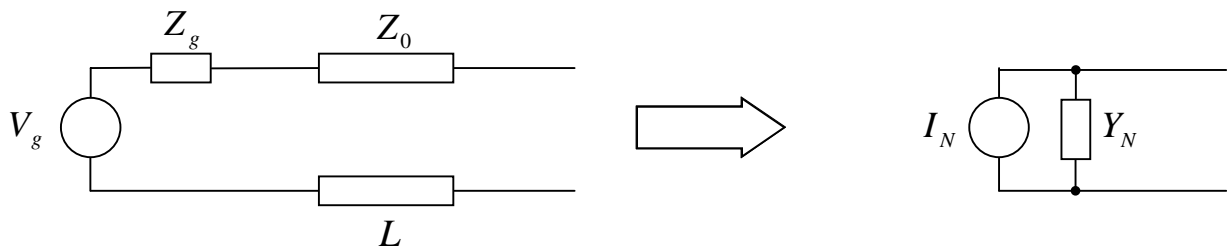
$$V_0 = \frac{I_g}{Y_g + Y_{IN}} \quad I_0 = I_g \cdot \frac{Y_{IN}}{Y_g + Y_{IN}}$$

Adottando la soluzione in forma viaggiante delle equazioni dei telegrafisti relativa alla corrente all'ascissa  $z = L$  per la linea di trasmissione in figura si ottiene infine:

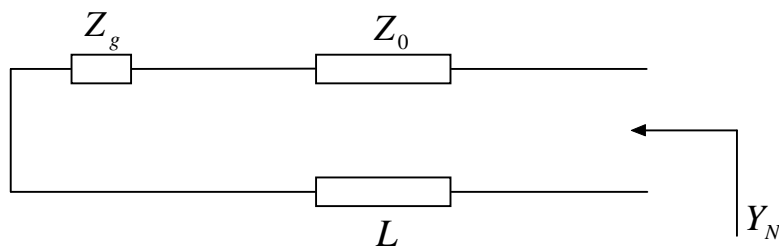
$$I_N \equiv I(L) = I_0 \cos(\beta \cdot L) - j \cdot V_0 \cdot Y_0 \cdot \sin(\beta \cdot L) = I_g \cdot \left[ \frac{Y_{IN}}{Y_g + Y_{IN}} \cos(\beta \cdot L) - j \cdot \frac{Y_0}{Y_g + Y_{IN}} \cdot \sin(\beta \cdot L) \right]$$

### Circuito equivalente di Norton nel caso di alimentazione con generatore di tensione.

Il quarto e ultimo caso è quello in cui si ha a che fare con una configurazione di alimentazione contenente un generatore di tensione con in serie la sua impedenza interna, connessi ad una linea di trasmissione (a sinistra nella figura sotto), e si vuole ridurre tale rete ad una più semplice secondo il circuito equivalente di Norton ( a destra nella figura sotto) :



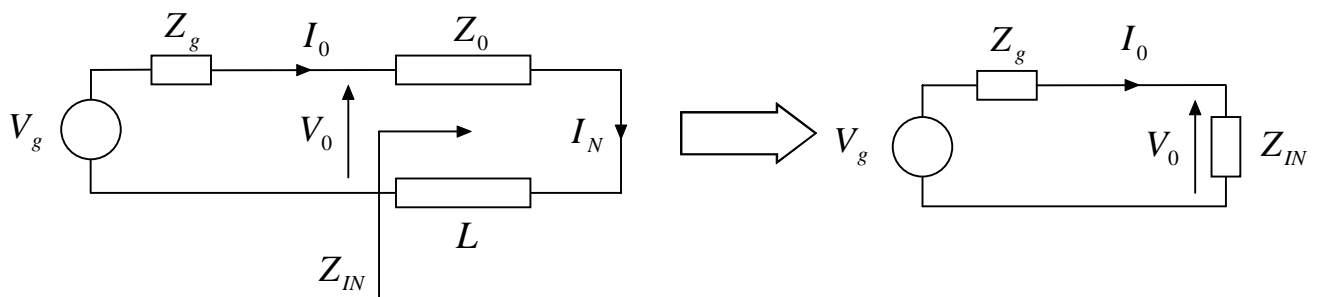
L'ammettenza equivalente di Norton si calcola come nei casi precedenti, passivando la rete a sinistra (cortocircuitare i generatori di tensione e aprire quelli di corrente) e calcolando l'ammettenza vista guardando dentro la rete:



Applicando in questo caso la formula del trasporto di una ammettenza attraverso una linea di trasmissione si ottiene (stando attenti che il carico è ora una impedenza):

$$Y_N = Y_0 \cdot \frac{\frac{1}{Z_g} + j \cdot Y_0 \tan(\beta \cdot L)}{Y_0 + j \cdot \frac{1}{Z_g} \tan(\beta \cdot L)}$$

Il generatore equivalente di Norton si calcola come nel caso precedente attraverso l'uso della seconda soluzione stazionaria delle equazioni dei telegrafisti calcolando dapprima tensione e corrente in ingresso alla linea di trasmissione ( $V_0 \equiv V(0)$ ,  $I_0 \equiv I(0)$ ) e in seguito la corrente in uscita dalla linea ( $I(L) \equiv I_N$ ) quando questa è in corto circuito.



Per fare questo conviene ridurre il circuito di sinistra, di cui si vuole calcolare la corrente di corto circuito, come recita il teorema di Norton, secondo lo schema a destra.

L'impedenza di carico  $Z_{IN}$  è quella di una linea di trasmissione di impedenza caratteristica  $Z_0$  chiusa in corto circuito (si vuole la corrente di corto circuito in uscita dalla rete); questa vale:

$$Z_{IN} = j \cdot Z_0 \cdot \tan(\beta \cdot L)$$

La corrente e la tensione in ingresso alla linea valgono allora:

$$I_0 = \frac{V_g}{Z_g + Z_{IN}} \quad V_0 = V_g \cdot \frac{Z_{IN}}{Z_g + Z_{IN}}$$

Adottando la soluzione in forma viaggiante delle equazioni dei telegrafisti relativa alla corrente all'ascissa  $z = L$  per la linea di trasmissione in figura si ottiene infine:

$$I_N \equiv I(L) = I_0 \cos(\beta \cdot L) - j \cdot \frac{V_0}{Z_0} \cdot \sin(\beta \cdot L) = V_g \cdot \left[ \frac{1}{Z_g + Z_{IN}} \cos(\beta \cdot L) - j \cdot \frac{\frac{Z_{IN}}{Z_0}}{Z_g + Z_{IN}} \cdot \sin(\beta \cdot L) \right]$$